Homomorfismos (aplicaciones lineales) entre Espacios Vectoriales (Resumen)

Índice

1. Conceptos y resultados básicos.

Definición. Sean $(\mathscr{U}, +, \cdot)$ y $(\mathscr{V}, +', \cdot')$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y

$$f : \mathscr{U} \longrightarrow \mathscr{V}$$

una aplicación. Se dice que f es un homomorfismo[1] entre los espacios vectoriales $\mathscr{U}$ y $\mathscr{V}$ (o que es una aplicación lineal) si se verifica:

(1) $\forall u, v \in \mathscr{U}$ se cumple que $f(u + v) = f(u) +' f(v)$.

(2) $\forall u \in \mathscr{U}$ y $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ se cumple que $f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot' f(u)$.

Observación. Si $f : \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ es un homomorfimo, entonces $f(\overline{0}_{\mathscr{U}}) = \overline{0}_{\mathscr{V}}$.

Definición. Sea $f : \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ un homomorfismo entre $\mathbb{K}$-e.v. Se dice que

1. f es un monomorfismo si f es inyectiva[2],
2. f es un epimorfismo si f es suprayectiva[3],
3. f es un isomorfismo si f es biyectiva[4],
4. f es un endomorfismo si $\mathscr{U} = \mathscr{V}$,
5. f es un automorfismo si f es un endomorfismo biyectivo.

Observación. Representamos por id al automorfismo identidad. Es decir id : $\mathscr{U} \to \mathscr{U}; \mathrm{id}(u) = u$. Y representamos por 0 al homomorfismo nulo. Es decir, $0 : \mathscr{U} \to \mathscr{V}; 0(u) = \overline{0}_{\mathscr{V}}$.

[1] Este concepto se utilizará en la asignatura de Cálculo II, en el contexto de la diferenciabilidad de funciones de varias variables

[2] Una aplicación $h : A \to B$ es inyectiva si $\forall x_1, x_2 \in A$, con $x_1 \neq x_2$ se cumple que $h(x_1) \neq h(x_2)$

[3] Una aplicación $h : A \to B$ es suprayectiva si $\forall y \in B$, con $\exists x \in A$ tal que $y = h(x)$

[4] Una aplicación es biyectiva si es inyectiva y suprayectiva

Definición. Sea $f : \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ un homomorfismo entre $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Se define:

(1) El núcleo de f como el conjunto $\operatorname{Ker}(f) = \{u \in \mathscr{U} \mid f(u) = \overline{0}_{\mathscr{V}}\}$.

(2) La imagen de f como el conjunto $\operatorname{Im}(f) = \{v \in \mathscr{V} \mid \exists u \in \mathscr{U} \text{ tal que } f(u) = v\}$.

Teorema. Sea $f : \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ un homomorfismo entre $\mathbb{K}$-e.v. Se verifica que:

(1) $\operatorname{Ker}(f)$ es un subespacio vectorial de $\mathscr{U}$.

(2) $\operatorname{Im}(f)$ es un subespacio vectorial de $\mathscr{V}$.

(3) Las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. f es un monomorfismo.
2. $\operatorname{Ker}(f) = \{\overline{0}_{\mathscr{U}}\}$.
3. $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 0$.

(4) Las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. f es un epimorfismo.
2. $\operatorname{Im}(f) = \mathscr{V}$.
3. $\dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(\mathscr{V})$ (si $\mathscr{V}$ es de tipo finito).

Teorema. Sean $\mathscr{U}$ y $\mathscr{V}$ dos $\mathbb{K}$-e.v. ($\mathscr{U}$ de tipo finito) y $f : \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ un homomorfismo. Se verifica que

$$\dim(\mathscr{U}) = \dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)).$$

Teorema. Sean $\mathscr{U}$ y $\mathscr{V}$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de tipo finito con $\dim(\mathscr{U}) = \dim(\mathscr{V})$ y $f : \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ un homomorfismo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) f es un monomorfismo.

(2) f es un epimorfismo.

(3) f es un isomorfimo.

Corolario. Sean $\mathscr{U}$ y $\mathscr{V}$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de tipo finito. Las siguientes afirmaciones son equivalente

1. $\mathscr{U}$ y $\mathscr{V}$ son isomorfos.
2. $\dim(\mathscr{U}) = \dim(\mathscr{V})$.

Observación. Sean $\mathscr{U}$ y $\mathscr{V}$ dos $\mathbb{K}$-e.v. de tipo finito, con $\dim(\mathscr{U}) = \dim(\mathscr{V})$. Sean $\{u_1, \ldots, u_n\}$ y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ bases de $\mathscr{U}$ y $\mathscr{V}$, respectivamente. Un isomorfismo de $\mathscr{U}$ en $\mathscr{V}$ se define como

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathscr{U} & \longrightarrow & \mathscr{V} \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i u_i & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i v_i. \end{array}$$

2. Representación matricial de un homomorfismo.

Sean:

- $\mathscr{U}$ y $\mathscr{V}$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de tipo finito,
- $f : \mathscr{U} \longrightarrow \mathscr{V}$ un homomorfismo,
- $\mathscr{B}_1 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y $\mathscr{B}_2 = \{v_1, \ldots, v_m\}$ bases de $\mathscr{U}$ y $\mathscr{V}$, respectivamente,
- $u \in \mathscr{U}$ y $(x_1, \ldots, x_n)$ las coordenadas de u respecto a $\mathscr{B}_1$, y
- $(y_1, \ldots, y_m)$ las coordenadas de $f(u) \in \mathscr{V}$ respecto a $\mathscr{B}_2$.

Se trata de expresar $(y_1, \ldots, y_m)$ en función de $(x_1, \ldots, x_n)$. De la definición de coordenadas se tiene que

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \text{ y que } f(u) = \sum_{i=1}^{m} y_i v_i.$$

Teniendo en cuenta que f es un homomorfimo, se deduce que

$$\sum_{i=1}^{m} y_i v_i = f(u) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(u_i)$$

Por otra parte, como $f(u_i) \in \mathscr{V}$, consideramos las coordenadas de $f(u_i)$ en la base $\mathscr{B}_2$; digamos que son $(a_{i1}, \ldots, a_{im})$. De nuevo utilizando la definición de coordenadas y de homormofismo, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} y_i v_i &= f(u) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(u_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i (a_{i1} v_1 + \cdots + a_{im} v_m) \\ &= \sum_{i=1}^{m} (a_{1i} x_1 + \cdots + a_{ni} x_n) v_i. \end{aligned}$$

En esta situación, utilizando que $\{v_1, \ldots, v_m\}$ son l.i. se concluye que

$$\begin{cases} y_1 = a_{11} x_1 + \cdots + a_{n1} x_n \\ \quad \vdots \\ y_m = a_{1m} x_1 + \cdots + a_{nm} x_n \end{cases}$$

que se denominan <u>ecuaciones del homomorfismo</u> respecto a $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$. O bien:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{A esta matriz se le llama} \\ \underline{\text{Representación Matricial}} \\ \underline{\text{de } f \text{ respecto a } \mathscr{B}_1 \text{ y } \mathscr{B}_2} \\ \text{y se representa como} \\ \mathcal{M}(f, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2).}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

También suele utilizarse la notación

$$\mathrm{Y} = \mathcal{M}(f, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2) \cdot \mathrm{X}$$

siendo Y las coordenadas de $f(u)$ en $\mathscr{B}_2$ y X las coordenadas de u en $\mathscr{B}_1$.

Observación. Cuando se trata de un endomorfismo, como sólo interviene un espacio vectorial, se utiliza la misma base tanto en la salida como en la llegada. Por ello, se simplifica la notación y en lugar de escribir $\boxed{\mathscr{M}(f, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_1)}$ se escribe $\boxed{\mathscr{M}(f, \mathscr{B}_1)}$.

Observación. A desarrollar en pizarra.

(1) $\mathscr{M}(f, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ es cuadrada si y solo si $\dim(\mathscr{U}) = \dim(\mathscr{V})$.

(2) Proceso para el cálculo de $\mathscr{M}(f, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$.

(3) Utilización de $\mathscr{M}(f, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$.

(4) Si $\mathscr{U} = \mathscr{V}$, $\mathscr{M}(\mathrm{id}_{\mathscr{U}}, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2) = \mathscr{M}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$.

3. Determinación del núcleo y de la imagen.

Dados

- $\mathscr{U}$ y $\mathscr{V}$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de tipo finito ($\dim(\mathscr{U}) = n$, $\dim(\mathscr{V}) = m$) y
- $f : \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ un homomorfismo,

se quiere determinar $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

$\boxed{\text{Cálculo de } \mathrm{Ker}(f)}$

Se procede como sigue:

(1) Fijar bases $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$ de $\mathscr{U}$ y $\mathscr{V}$, respectivamente; en la práctica, si es posible, se toman bases canónicas

(2) Determinar $A = \mathscr{M}(f, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$.

(3) Triangular por filas A; sea B el resultado de la triangulación.

(4) Las ecuaciones implícitas de $\mathrm{Ker}(f)$, respecto a la base $\mathscr{B}_1$, son

$$B \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{Cálculo de } \mathrm{Im}(f)}$

En el caso de $\mathrm{Im}(f)$, se utiliza que la imagen mediante f de los vectores de una base de $\mathscr{U}$ forman un sistema generador de $\mathrm{Im}(f)$. Por tanto, se procede como sigue:

(1) Fijar bases $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$ de $\mathscr{U}$ y $\mathscr{V}$, respectivamente; en la práctica, si es posible, se toman bases canónicas

(2) Determinar $A = \mathscr{M}(f, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$.

(3) Triangular por filas la matriz A^T; sea M el resultado de la triangulación.

(4) La dimensión de $\mathrm{Im}(f)$ es el número de filas no nulas de M (es decir, el rango de la matriz) y cada fila no nula de M son las coordenadas, respecto a $\mathscr{B}_2$, de un vector de una base de $\mathrm{Im}(f)$.

4. Cambio de base en un homomorfismo

Sean

- $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$ dos $\mathbb{K}$-e.v. de tipo finito,
- $f : \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ un homomorfismo,
- $\mathscr{B}_1, \tilde{\mathscr{B}}_1$ bases de $\mathscr{U}$ y $\mathscr{B}_2, \tilde{\mathscr{B}}_2$ bases de $\mathscr{V}$.

Entonces, la la fórmula de cambio de base es

$$\boxed{\mathscr{M}(f, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2) = \mathscr{M}(\tilde{\mathscr{B}}_2, \mathscr{B}_2)\mathscr{M}(f, \tilde{\mathscr{B}}_1, \tilde{\mathscr{B}}_2)\mathscr{M}(\mathscr{B}_1, \tilde{\mathscr{B}}_1)}.$$

5. Cambio de base en un endomorfismos

Sean

- $\mathscr{U}$ es un $\mathbb{K}$-e.v. de tipo finito,
- $f : \mathscr{U} \to \mathscr{U}$ un endomorfismo,
- $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ bases de $\mathscr{U}$.

Entonces, la la fórmula de cambio de base es

$$\boxed{\mathscr{M}(f, \mathscr{B}_1) = \mathscr{M}(\mathscr{B}_2, \mathscr{B}_1) \cdot \mathscr{M}(f, \mathscr{B}_2) \cdot \mathscr{M}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2) = \mathscr{M}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)^{-1} \cdot \mathscr{M}(f, \mathscr{B}_2) \cdot \mathscr{M}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)}$$

Como consecuencia de todo lo anterior se deduce el siguiente teorema.

Teorema. Sea $f : \mathscr{U} \to \mathscr{U}$ un endomorfismo, con $\mathscr{U}$ un $\mathbb{K}$-e.v. de tipo finito. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. f es un automorfismo.
2. $\exists \mathcal{B}$ de $\mathscr{U}$ tal que $\det(\mathscr{M}(f, \mathscr{B})) \neq 0$
3. $\forall \mathcal{B}$ base de $\mathscr{U}$ se tiene que $\det(\mathscr{M}(f, \mathscr{B})) \neq 0$

6. Diccionario endomorfismos-matrices

Sea $\mathscr{U}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de tipo finito y $\dim(\mathscr{U}) = n$. Se considera el conjunto

$$\mathrm{End}(\mathscr{U}) = \{f : \mathscr{U} \to \mathscr{U} \mid f \text{ homomorfismo}\}.$$

Se verifica que

- El conjunto $\mathrm{End}(\mathscr{U})$, con las operaciones usuales de las aplicaciones, tiene estructura de $\mathbb{K}$-espacio vectorial.
- $\mathrm{End}(\mathscr{U})$ es isomorfo a $\mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Este hecho implica que es equivalente trabajar con endomorfismos o con matrices ya que el isomorfismo correspondiente traduce la información de un ámbito al otro.

En la práctica, la idea consiste en establecer un diccionario entre $\mathrm{End}(\mathscr{U})$ y $\mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Para ello, se fija una base $\mathscr{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de $\mathscr{U}$ (en la práctica, si es posible, $\mathscr{B} = \mathscr{B}_c$)

- <u>Traductor endomorfismo $\rightarrowtail$ matriz</u>

  $f \in \mathrm{End}(\mathscr{V}) \twoheadrightarrow \mathscr{M}(f, \mathscr{B})$ (véase Sección 2)

- <u>Traductor matriz $\rightarrowtail$ endomorfismo</u>

  $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \twoheadrightarrow f \in \mathrm{End}(\mathscr{U})$ donde f se define como

$$\boxed{\begin{array}{ccc} u \in \mathscr{U} & & f(u) \in \mathscr{U} \\ \downarrow & & \uparrow \\ \text{X son las} & & A\cdot \text{X son las} \\ \text{coord. de } u \text{ en } \mathscr{B} & \longrightarrow & \text{coord. de } f(u) \text{ en } \mathscr{B} \end{array}}$$

En esta situación se establece el siguiente diccionario

$$\boxed{\text{Diccionario } \mathrm{End}(\mathscr{U}) \leftarrowtail\!\rightarrowtail \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})}$$

$\mathrm{End}(\mathscr{U})$	$\mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$
f	A
g	B
$\lambda f + \mu g$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$	$\lambda A + \mu B$
id (endomorfismo identidad)	I
$f - \lambda\mathrm{id}$ con $\lambda \in \mathbb{K}$	$A - \lambda \mathrm{I}$
0 (endomorfismo nulo)	matriz nula
f (automorfismo)	A^{-1}
$f^k = \overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{k \text{ veces}}$	A^k
$f \circ g$	$A \cdot B$

<u>Observación.</u> Sean $\mathscr{U}$ y $\mathscr{V}$ $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de tipo finito y sea

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{U}, \mathscr{V}) = \{f : \mathscr{U} \to \mathscr{V} \mid f \text{ homomorfismo}\}.$$

Similarmente, se demuestra que $\mathrm{Hom}(\mathscr{U}, \mathscr{V})$, con operaciones usuales de aplicaciones, es un espacio vectorial isomorfo a $\mathscr{M}(\mathbb{K})_{\dim(\mathscr{U})\times\dim(\mathscr{V})}$.